



Полевая апробация алгоритма определения коэффициента рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании

Г.Е. Валов^{1,2}✉, О.В. Вшивкова¹

¹ Московский государственный университет геодезии и картографии, Москва, Россия

² Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, Москва, Россия

✉ georgevalov@mail.ru

ЦИТИРОВАНИЕ Валов Г.Е., Вшивкова О.В. Полевая апробация алгоритма определения коэффициента рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании // Известия вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». 2025. Т. 69, № 6. С. 8–24. DOI:10.30533/GiA-2025-057.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА тригонометрическое нивелирование, коэффициент рефракции, градиентные геодезические измерения, стратификация атмосферы

АННОТАЦИЯ В работе представлена полевая апробация алгоритма определения коэффициента рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании. Разработанный авторами алгоритм основан на решении по методу Монте-Карло системы нелинейных уравнений, описывающих изменение угла вертикальной рефракции в рабочем слое воздуха. Выполнен анализ факторов формирования вертикальной рефракции, подлежащих учету при производстве градиентных (на нескольких уровнях) геодезических измерений. Отмечено, что успешная реализация разработанного алгоритма возможна при условии однонаправленного характера изменения состояния атмосферы с высотой, т. е. в отсутствие слоев с разным характером атмосферной стратификации. На этапе подготовки полевых наблюдений разработаны методические приемы производства градиентных геодезических измерений, базирующиеся на анализе факторов формирования вертикальной рефракции, подлежащих учету при производстве градиентных геодезических измерений; предложена процедура угловых измерений на нескольких уровнях, обеспечивающая оперативность и точность получения исходных данных, необходимых для определения коэффициента рефракции. Выполненные полевые наблюдения и анализ полученных результатов показали возможность использования тенденции изменения приращений рефракции с высотой в качестве

объективного критерия обнаружения слоистости атмосферы в рабочем слое воздуха. Оценка точности превышений, исправленных за влияние рефракции с помощью разработанного авторами алгоритма, показала соответствие полученных результатов требованиям геометрического нивелирования IV класса.

1 Введение

Влияние вертикальной рефракции (ВР) — основной фактор, ограничивающий использование тригонометрического нивелирования в геодезическом производстве. Технические характеристики современных электронных тахеометров обеспечивают построение высотных сетей с точностью до II класса включительно [1]. Однако негативное влияние ВР может привести к погрешностям, недопустимым даже при техническом нивелировании. На сегодняшний день исследователями предложены десятки технологий, методик и алгоритмов учета и ослабления влияния ВР, среди них визуальные^{1,2} и автоматизированные [2, 3] турбулентные методы; различные вариации метода двустороннего тригонометрического нивелирования^{3,4,5} [4]; методы, основанные на теории подобия Монина — Обухова [5, 6]; методы геодезического базиса⁶ и геодезической службы рефракции⁷; метод обратного преобразования (инверсии) коэффициента рефракции [7]; методики нивелирования из середины с учетом влияния ВР [8–16]. Однако все перечисленные методы обладают теми или иными недостатками.

В работе [17] авторами сформулированы критерии оценки методов учета и ослабления влияния ВР на результаты тригонометрического нивелирования, обеспечивающие возможность сравнительного анализа рассматриваемых методов: соответствие требуемой точности; время, затрачиваемое на производство полевых измерений и обработку полученных результатов; стоимость реализации; ограничения условий применения; требуемая квалификация исполнителей. В результате анализа перечисленных выше методов было показано, что ни один из них не удовлетворяет одновременно всем перечисленным критериям.

По мнению авторов, получить оптимальный баланс в соответствии вышеуказанным критериям можно при использовании технологии эффективного учета влияния приземного слоя атмосферы [18]. В основе данной технологии — «геодезическая» модель атмосферы и принцип определения параметров модели по градиентным геодезическим и (или) метеорологическим измерениям. Определение параметров модели по градиентным измерениям можно реализовать тремя способами: метеорологическим, комбинированным [19] и геодезическим. Метеорологический способ не отвечает оговоренным требованиям

-
- 1 Brunner F.K. Geodetic Refraction: Effects of Electromagnetic Wave Propagation Trough the Atmosphere. Berlin: Springer, 1984. P. 216.
 - 2 Островский А.П., Суюнов А.С. Турбулентный метод учета вертикальной рефракции в условиях Средней Азии // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. Львов: Изд-во при Львов. ун-те, 1989. Вып. 49. С. 112–120.
 - 3 Лазарев Е.Г. Тригонометрическое нивелирование и гравиметрические исследования в Антарктиде. М.: Наука, 1970. 75 с.
 - 4 Островская С.А. Учет вертикальной рефракции на основании взаимных и эквивалентных высот луча // Известия вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». 1984. № 3. С. 51–60.
 - 5 Менухов И.И. О точности учета вертикальной рефракции по одновременно измеренным метеозлементам и зенитным расстояниям // Известия вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». 1983. № 4. С. 48–52.
 - 6 Никольский Е.К. О сетях с рефракционными базисами // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. Львов: Изд-во при Львов. ун-те, 1973. Вып. 18. С. 58–60.
 - 7 Островский А.Л., Джуман Б.М., Заблоцкий Ф.Д. и др. Учет атмосферных влияний на астрономо-геодезические измерения. М.: Недра, 1990. 235 с.

к точности (III и IV классы) [19]; комбинированный способ удобен в реализации и обеспечивает точность IV класса на дистанции до километра, однако для эффективной реализации метеорологической составляющей градиентных измерений необходим метеорологический градиентометр. Разработка данного прибора доведена авторами до стадии опытного образца, что затрудняет применение комбинированного способа, несмотря на простоту конструкции и низкую себестоимость комплектующих градиентометра. Геодезический способ заключается в определении всех параметров модели по результатам градиентных (на нескольких уровнях) измерений вертикальных углов. Предрасчет точности, выполненный в работе [17], показал, что геодезический способ обеспечивает точность IV класса на дистанции длиной до одного километра, при этом для его реализации необходимо только массово выпускаемое геодезическое оборудование. Кроме того, немаловажное достоинство геодезического способа определения параметров «геодезической» модели атмосферы заключается в том, что установленные по результатам угловых измерений значения параметров модели являются результирующими для всей трассы. Они сформированы всей совокупностью факторов, влияющих на величину ВР и представленных вдоль визирной линии. Последнее является существенным преимуществом геодезического способа перед комбинированным, поскольку не возникает погрешности, обусловленной неучетом изменения характера подстилающей поверхности (ПП) вдоль дистанции.

В работе [17] представлен разработанный авторами алгоритм определения коэффициента рефракции по результатам градиентных геодезических измерений, основанный на весовой реализации метода Монте-Карло. Исходными данными для работы алгоритма служат результаты измерений углов наклона / зенитных расстояний на четырех уровнях (высотах) визирной цели. Обязательным требованием к рабочему слою воздуха, в котором выполняют градиентные измерения, является отсутствие слоистости атмосферы. Параметры модели должны характеризовать состояние атмосферы на всех измерительных уровнях, включенных в математическую обработку.

Целью данной работы является полевая апробация алгоритма определения коэффициента рефракции по градиентным геодезическим измерениям [17].

Для достижения указанной цели необходимо решить следующие задачи:

- 1) составить перечень факторов формирования ВР, подлежащих учету при организации полевых градиентных геодезических измерений;
- 2) принимая во внимание сформированный перечень факторов, разработать методические приемы производства градиентных геодезических измерений;
- 3) подготовить процедуру производства угловых измерений на нескольких уровнях;
- 4) составить программу полевых работ при реализации геодезического способа определения параметров «геодезической» модели атмосферы;
- 5) выполнить полевые геодезические наблюдения и проанализировать полученные результаты с целью выявления объективного критерия обнаружения слоистости атмосферы в рабочем слое воздуха;
- 6) используя разработанный алгоритм, по результатам полевых наблюдений вычислить коэффициент рефракции и ввести поправку в измеренные превышения;
- 7) оценить точность исправленных превышений и сравнить результаты с точными превышениями, полученными методом геометрического нивелирования, и с превышениями, исправленными за стандартный коэффициент рефракции 0,14.

2 Материалы и методы

2.1 Анализ факторов формирования вертикальной рефракции

Для корректного решения второй задачи необходимо выделить факторы формирования местных (микромасштабных) полей ВР, подлежащие учету при производстве градиентных геодезических измерений.

Известно, что основным фактором формирования микроклимата в пограничном слое атмосферы является ПП⁸. В пограничном слое выделяют буферную зону, непосредственно прилегающую к ПП. Указанная зона получила название приземного слоя, особенностями которого являются мелкомасштабные турбулентность и конвекция (первая обусловлена шероховатостью ПП, вторая — неравномерностью нагрева ПП⁹). Днем мощность приземного слоя составляет несколько десятков метров, ночью — несколько метров, именно в этом слое производят подавляющее большинство линейно-угловых геодезических измерений.

По мере приближения к земной поверхности скорость ветра затухает, высота z_0 , на которой скорость ветра равна нулю, называется высотой шероховатости. В слое шероховатости поступательное движение ветра гасится за счет молекулярного трения. Высота шероховатости зависит от масштаба неровностей ПП, характера растительного покрова, скорости ветра и стратификации атмосферы.

ПП является неоднородной. Вдоль визирного луча в общем случае меняются угол наклона ПП и ее ориентация относительно солнечных лучей и ветра; химический состав почвы и ее физическое состояние; характер растительного покрова и т. п. Совокупность указанных факторов можно объединить в одно понятие — тип ПП [18]. При переходе от одного типа ПП к другому меняются интенсивность теплообмена, высота шероховатости, вертикальный градиент показателя преломления, стратификация атмосферы, что неминуемо приводит к изменениям коэффициента рефракции вдоль визирной линии.

Геодезический способ обеспечивает определение результирующих для трассы параметров «геодезической» модели, сформированных всей совокупностью представленных типов ПП. Такой подход позволяет исключить тип ПП из числа факторов, подлежащих учету при составлении программы полевых наблюдений и разработке методических приемов их реализации.

Другим немаловажным фактором, влияющим на формирование поля ВР, является высота над ПП. Связь высоты с метеовеличинами и их градиентами можно описать показательными функциями^{10,11}. Согласно Р. Гейгеру¹⁰, изменение значений метеовеличин S_z и их градиентов $\partial S/\partial z$ с высотой z можно представить уравнениями вида

1 
2 

$$S_z = S_0 + az^b,$$

$$\partial S/\partial z = abz^{b-1},$$

где S_0 — значение метеовеличины на исходной высоте, например 1 м;
 a — градиент метеовеличины на исходной высоте;
 b — коэффициент обмена.

8 Оке Т.Р. Климаты пограничного слоя / пер. с англ. под ред. А.С. Дубова. Л.: Гидрометеоздат, 1982. 360 с.

9 Несмелова Е.И., Филиппова М.Г. Микроклиматология: учеб. пособие. М.: МГУ, 2006. 186 с.

10 Гейгер Р. Климат приземного слоя воздуха / пер. с англ. И.М. Шейниса; под ред. и с предисл. С.А. Сапожниковой. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 485 с.

11 Лайхтман Д.Л. Физика пограничного слоя атмосферы. 2-е изд., перераб. и доп. Л.: Гидрометеоздат, 1970. 341 с.

В «геодезической» модели атмосферы учет влияния высоты на формирование рефракционных характеристик осуществляется с помощью принципа учета влияния атмосферы без знания высоты визирного луча.

Распределение температуры в приземном слое воздуха зависит от стратификации атмосферы и в общем случае подчиняется логарифмическому закону. Влияние стратификации на тепловой поток может быть охарактеризовано числом Ричардсона (Ri) и связано с профилем ветра формулой следующего вида¹²:

$$3 \quad Ri = \frac{g}{T_a} \times \frac{\partial T / \partial z}{(\partial U / \partial z)^2} \approx \frac{g}{T_a} \times \frac{\Delta T}{\Delta U^2},$$

где g — ускорение свободного падения;

T_a — средняя температура приземного слоя;

$\partial T / \partial z$ и $\partial U / \partial z$ — вертикальные градиенты температуры и скорости ветра.

Температурной стратификации, подчиняющейся логарифмическому закону, соответствуют малые значения числа Ричардсона ($-0,008 \leq Ri \leq 0,02$). Чем больше число Ричардсона, тем больше температурная стратификация отличается от логарифмического закона. Подобные условия обычно наблюдаются в слое, не превышающем два метра от земной поверхности. Граница указанного слоя является точкой перегиба профиля температуры, выше которого температурная стратификация аппроксимируется функцией, близкой к логарифмической. Однако в ряде случаев, обусловленных в первую очередь наличием растительного покрова, точек перегиба профиля температуры может быть несколько. Это связано с тем, что формирование профиля температуры определяется профилем фитомассы. Наличие растительного покрова создает перегибы в атмосферной стратификации приземного слоя и в общем случае приподнимает высоту шероховатости. На основании этого можно сделать вывод, что *при наличии растительного покрова необходимо производить измерения выше высоты растительного покрова, являющейся уровнем перегиба атмосферной стратификации.*

Даже незначительная поросль существенно меняет физические свойства ПП в разрезе поглощения солнечной радиации, нагревания, охлаждения, а также испарения¹³. При достижении высоты в один метр растительный покров приобретает ряд особых микроклиматологических черт: замедление турбулентного движения, ослабление ветра, значительная влажность, умеренные температуры с максимумами на поверхности растительного покрова или чуть ниже (в зависимости от проникающей способности солнечной радиации). В ночное время сначала охлаждается поверхность растительного покрова, а затем охлажденный воздух опускается ниже, создавая минимум температуры на определенной высоте. Часто внутри растительного покрова присутствует несколько уровней перегиба атмосферной стратификации. Это связано с тем, что в непосредственной близости от поверхности находится зона турбулентных колебаний, обусловленная влиянием рельефа (чем больше орографические неровности, тем больше указанная зона), при этом при поднятии вступает в силу замедление турбулентного движения растительным покровом¹³. На основании вышесказанного можно сделать вывод, что *методические приемы выполнения градиентных геодезических измерений должны обеспечивать контроль уровней перегиба температурной стратификации, особенно на линиях, покрытых растительным покровом.*

2.2 Разработка методических приемов производства градиентных геодезических измерений

С опорой на представленный выше анализ факторов формирования ВР, известные закономерности ее изменений во времени и пространстве, специфические

¹² Несмелова Е.И., Филиппова М.Г. Микроклиматология: учеб. пособие. М.: МГУ, 2006. 186 с.

¹³ Короткевич В.Н. Обзор работ по изучению микроклимата. Л.: Ред.-изд. отд. ЦУЕГМС. Ленингр. отд., 1936. 82 с.

требования к точности и организации градиентных измерений при реализации разработанного авторами алгоритма определения коэффициента рефракции [17] предлагаются следующие методические приемы производства градиентных геодезических измерений:

1. Визирная линия на нижнем уровне должна располагаться выше верхней границы растительности и уровня шероховатости, что позволит минимизировать вероятность возникновения точек перегиба вертикального профиля атмосферной стратификации и сократить их количество.
2. Количество измерительных уровней должно быть больше четырех, что обеспечит:
 - повышение точности моделирования коэффициента рефракции за счет наличия избыточных измерений;
 - контроль уровней перегиба стратификации атмосферы;
 - возможность формирования нескольких наборов уровней, включенных в обработку, в случае обнаружения точек перегиба вертикального профиля стратификации атмосферы.
3. При расчете количества приемов, с помощью которых осуществляется измерение вертикальных углов, следует учитывать технические характеристики используемого электронного тахеометра и требования к точности угловых измерений при реализации разработанного авторами алгоритма определения коэффициента рефракции.
4. Процедура производства угловых измерений на нескольких уровнях должна обеспечивать выполнение полного комплекса измерений в максимально сжатые сроки с целью уменьшения влияния временных изменений рефракции, которые могут быть значительными [20]. На каждом уровне в качестве визирной цели следует использовать закрепленные на вешке или рейке геодезические марки (отражательные пленки). Необходимо установить режим «Измерение углов», при котором электронный тахеометр выполняет отсчет практически мгновенно, т. к. не приходится ожидать прихода отраженного от призмы сигнала и его последующей обработки (в режиме «Точно» процесс линейных измерений может занять 5–6 секунд). Исполнитель осуществляет наведение на нижнюю визирную цель, измеряет вертикальный угол, после чего при том же круге, не открепляя закрепительные винты, вертикальным наводящим винтом производит наведение на следующую визирную цель. Для контроля временных изменений состояния атмосферы и уменьшения случайных погрешностей наведения измерения проводятся в прямом и обратном направлениях (от нижней марки к верхней и обратно). Указанные действия производятся вращением наводящего винта одной рукой и нажатием на кнопку измерения другой рукой, один полуприем на все измерительные уровни можно осуществить в течение нескольких десятков секунд. Аналогичные действия выполняются при другом положении вертикального круга. Таким образом производится один полный прием на все измерительные уровни.
5. Разность высот визирных целей должна удовлетворять следующим условиям:
 - приращения рефракции с высотой, которые используются для определения параметров модели, должны быть на порядок больше погрешности их определения;
 - необходимо обеспечить контроль точек перегиба.

Для удовлетворения первого условия следует увеличивать расстояние между визирными целями, выполнение второго условия связано с уменьшением разности высот визирных целей. Таким образом, речь идет об определении оптимальной разности высот визирных целей. Предварительные исследования в этом направлении выполнены в работе [19]. В статье [17] авторами показано, что при использовании двухсекундного электронного тахеометра на дистанции длиной один километр минимальная разность высот визирных целей составляет 0,5 м.

Изложенные выше методические приемы производства градиентных геодезических измерений обеспечивают повышение точности и оперативности производства геодезических измерений на нескольких уровнях и выполнение сформулированных в разделе 2.1 требований.

2.3 Составление программы полевых геодезических наблюдений при реализации геодезического способа определения параметров «геодезической» модели атмосферы

Программа полевых наблюдений при реализации геодезического способа определения параметров «геодезической» модели атмосферы включает следующие этапы:

1. В точке наблюдения устанавливается электронный тахеометр, инструмент приводится в рабочее положение, измеряется высота инструмента над пунктом.
2. На определяемый пункт устанавливается отражатель, на который осуществляется измерение горизонтального проложения D' .
3. На определяемом пункте устанавливается веха или рейка с закрепленными на ней пятью (дополнительный уровень необходим для обеспечения избыточного количества измерений) геодезическими марками. Расстояния между марками измеряются рулеткой от нижней до каждой последующей перед установкой на определяемый пункт. Расстояния между марками должны удовлетворять условиям, оговоренным выше, и предварительно равны 50 см [19]. Нижняя визирная линия должна располагаться выше высоты шероховатости и растительного покрова.
4. Электронный тахеометр переводится в режим «Измерение углов», осуществляется измерение вертикальных углов в соответствии с описанной выше процедурой. Количество приемов подбирается из расчета обеспечения требуемой точности конкретным инструментом.

2.4 Описание эксперимента



Рис. 1 
Схема экспериментального полигона

Fig. 1
Scheme of the test area

Для полевой апробации разработанного авторами алгоритма определения коэффициента рефракции и экспериментального обоснования методических приемов производства градиентных геодезических измерений был создан экспериментальный полигон на территории Заокского района Тульской области. Схема полигона представлена на рис. 1. Превышения между исходным пунктом Родник и определяемыми пунктами Речка, Костино, Швейцария измерены по программе геометрического нивелирования III класса.

Эксперимент проводился в июле – августе 2024 года. Исходный пункт Родник представляет собой столбик принудительного центрирования, Костино — грунтовый репер, Речка и Швейцария — окопанные двухметровые куски арматуры. Превышения h_{geom} , полученные из геометрического нивелирования, и основные характеристики линий экспериментального полигона представлены в табл. 1. В четвертом столбце табл. 1 — среднеинтегральные высоты визирного луча z_{cp} над ПП.

В качестве визирной цели использовалась шашечная рейка с наклеенными светоотражательными

марками. Устойчивость рейки обеспечивал изготовленный из деревянных реек фиксированный «бипод». На пункте Речка разность высот визирных целей составляла 0,7 м, на двух других определяемых пунктах — 0,5 м. Высоты h_i визирных целей на рейках (расстояния от пятки рейки) измерялись рулеткой. Продольные профили визирных линий представлены на рис. 2.

Таблица 1

Основные характеристики линий экспериментального полигона

Table 1

Basic characteristics of the test area lines

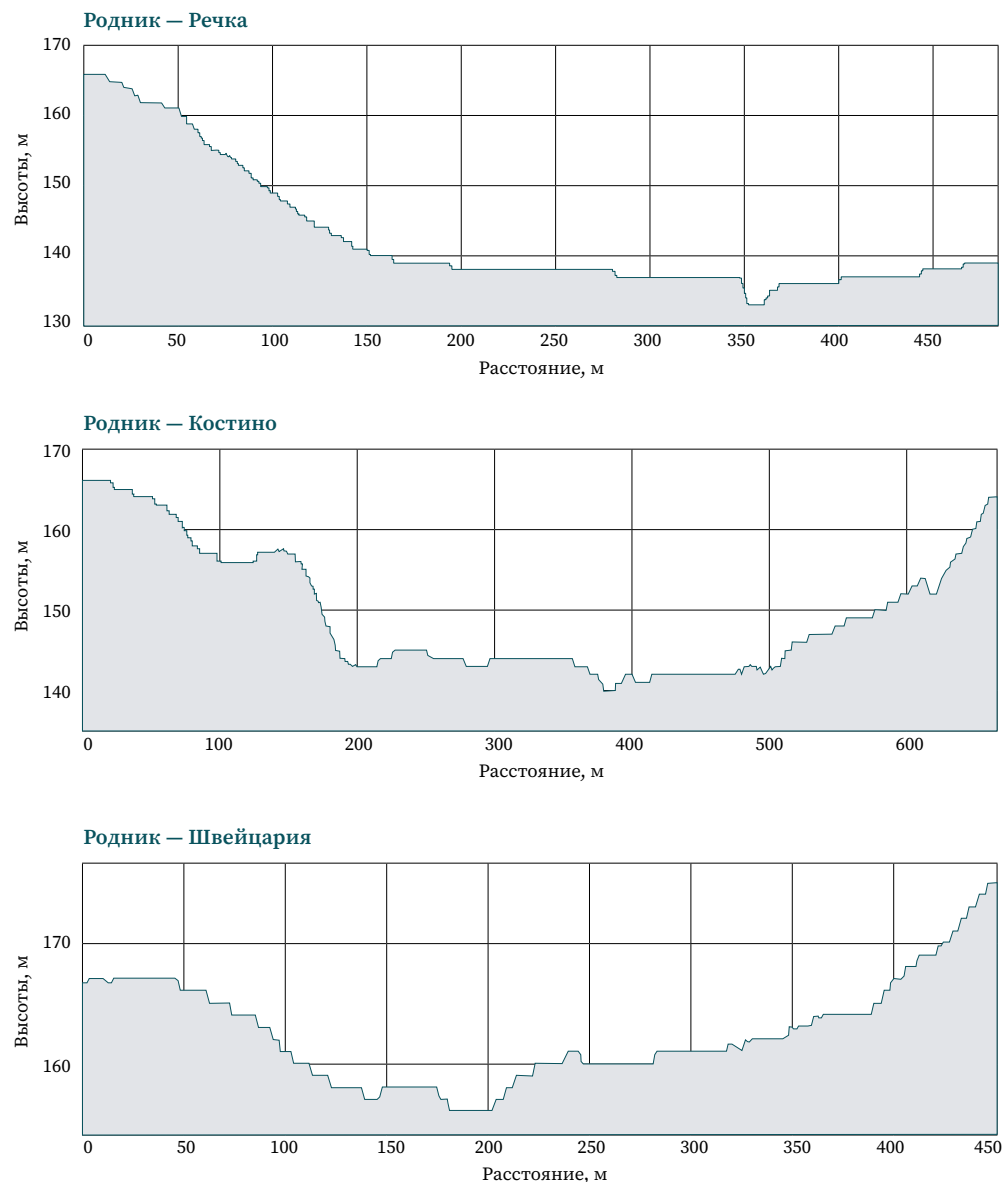
Визирная линия	D' , м	h_{geom} , м	$z_{ср}$, м	Характеристика ПП
Родник — Речка	485,260	-28,9425	11,679	Полевая растительность высотой до 0,5 м. В конце трасса пересекает р. Скнигу
Родник — Костино	665,178	-3,3255	15,442	Полевая растительность высотой 1,0–1,5 м. В середине скопление древесной растительности (значительно ниже визирного луча). Почти половина трассы проходит вдоль р. Скнигу
Родник — Швейцария	452,039	7,6770	8,518	Полевая растительность высотой 1,0–1,5 м. В середине в непосредственной близости от визирной линии — лиственное дерево

Рис. 2

Профили рельефа вдоль визирных линий

Fig. 2

Relief profiles along the sighting lines



Для измерений использовался электронный тахеометр SOUTH NTS-362R6 с точностью угловых измерений 2". Измерения на каждой визирной линии производились на пяти измерительных уровнях семью приемами по описанной выше процедуре. Для каждого уровня вычислялось среднее на период измерений превышение, поправка за рефракцию, автоматически вводимая электронным тахеометром, обнулялась.

Измеренные превышения были проанализированы на предмет соответствия точности IV класса. Далее в полученные превышения вводилась поправка за стандартный коэффициент рефракции (0,14) и повторно осуществлялся анализ точности, что позволило оценить эффективность использования стандартного коэффициента рефракции при одностороннем тригонометрическом нивелировании. После этого результаты градиентных геодезических измерений анализировались на предмет слоистости атмосферы, обусловленной наличием точек перегиба вертикального профиля стратификации атмосферы. В случае обнаружения слоистости результаты измерений, содержащие ее влияние, по возможности исключались. На основе градиентных геодезических измерений с помощью разработанного авторами алгоритма [17] определялся коэффициент рефракции. Смоделированное таким образом значение коэффициента рефракции использовалось для введения поправки в превышение, измеренное на нижнем измерительном уровне. Превышение, исправленное за влияние вертикальной рефракции, анализировалось на предмет соответствия точности геометрического нивелирования IV класса.

3 Результаты и обсуждение

Превышения между исходным и определяемыми пунктами $h_{измер}$ вычислялись по формуле

$$h_{измер} = \bar{D} \cos \bar{z} + i - V + \frac{\bar{D}^2}{2R_{cp}},$$

где \bar{D} и \bar{z} – средние для приема значения наклонной дальности и зенитного расстояния;

i – высота инструмента;

V – высота визирной цели над определяемым пунктом;

R_{cp} – средний радиус кривизны Земли.

Последнее слагаемое в формуле (4) представляет собой поправку за кривизну Земли.

Таблица 2 Сравнение точности измеренных превышений и превышений, исправленных за стандартный коэффициент рефракции, с допустимой погрешностью нивелирования IV класса

Визирная линия	S , м	$\Delta h_{пред}$, мм	Δh , мм	$\Delta h_{k=0,14}$, мм
Родник – Речка	485,260	9,6	4,8	2,2
Родник – Костино	665,178	13,4	27,2	22,4
Родник – Швейцария	452,039	9,0	17,7	15,5

Table 2 Comparing of the accuracy of the measured elevation differences and the elevation differences, corrected for the standard refraction coefficient, with the maximum allowable error for the IV class levelling

Согласно данным табл. 2, на всех линиях, кроме Родник – Речка, истинные погрешности Δh измеренных превышений превысили допустимые для IV класса значения $\Delta h_{пред}$, равные удвоенным средним квадратическим погрешностям (СКП) (случайная СКП для IV класса – 10 мм/км¹⁴). Сравнительно малое влияние рефракции по линии Родник – Речка можно объяснить низкорослым растительным покровом и значительной высотой визирного луча вблизи прибора.

14 СТО НОПРИЗ И-002-2017. Инженерно-геодезические изыскания. Создание (развитие) опорных геодезических сетей методом геометрического нивелирования. Определение высот. М.: Национальное объединение изыскателей и проектировщиков, 2018. 55 с.

В превышения, полученные по формуле (4), вводилась поправка за стандартный коэффициент рефракции:

$$h_{k=0,14} = h_{измер} - 0,14 \frac{D^2}{2R_{cp}}$$

Для каждой линии отмечено повышение точности за счет использования стандартного коэффициента рефракции (табл. 2). Однако только на линии Родник – Речка погрешность $\Delta h_{k=0,14}$ определения превышения, исправленного за стандартный коэффициент рефракции, удовлетворяет требованиям IV класса. На основании данных табл. 2 можно сделать вывод о необходимости учета влияния ВР и низкой эффективности использования поправки за стандартный коэффициент рефракции.

Для пяти измерительных уровней при наличии точек перегиба из обработки можно исключить лишь крайние уровни (первый или пятый), исключение оставшихся уровней лишено смысла, т. к. изменение угла рефракции в расчетном слое воздуха должно быть однонаправленным.

Выявление слоистости атмосферы предлагается выполнять на основании анализа характера изменения с высотой измеренных приращений угла рефракции $\delta r_{i \rightarrow j}$ (приращение угла рефракции на текущем уровне j относительно исходного i), вычисляемых по следующей формуле [13]:

$$\delta r_{i \rightarrow j} = (\Delta \nu_{i \rightarrow j})_{изм} - (\Delta \nu_{i \rightarrow j})_{теор},$$

где $(\Delta \nu_{i \rightarrow j})_{изм}$ – разность измеренных углов наклона между исходным i -м и j -м уровнями; $(\Delta \nu_{i \rightarrow j})_{теор}$ – теоретическая разность углов наклона:

$$(\Delta \nu_{i \rightarrow j})_{теор} = \frac{\Delta h_{i \rightarrow j} \rho^n}{D},$$

где $\Delta h_{i \rightarrow j}$ – разности высот визирных целей на i -м и j -м уровнях.

Сделать вывод о наличии точек перегиба и необходимости исключения из обработки первого или последнего уровня позволяет анализ тенденции изменения приращений рефракции с высотой. Значения измеренных приращений угла рефракции по каждой визирной линии представлены в табл. 3.

Таблица 3

Измеренные приращения угла рефракции

Table 3

The measured increments of the refractive angle

Визирная линия	Уровни	$(\Delta \nu_{i \rightarrow j})_{теор}, "$	$(\Delta \nu_{i \rightarrow j})_{изм}, "$	$\delta r_{i \rightarrow j}, "$	
Родник – Речка	1	1-2	297,1	299,0	2,0
		1-3	594,4	594,1	-0,3
		1-4	891,5	890,0	-1,5
		1-5	1188,6	1187,5	-1,1
	2	2-3	297,3	295,1	-2,2
		2-4	594,4	591,0	-3,4
		2-5	891,6	888,5	-3,1
Родник – Костино	1	1-2	155,4	156,0	0,6
		1-3	310,1	312,9	2,8
		1-4	465,1	466,3	1,2
		1-5	620,5	620,6	0,1
	2	2-3	154,7	156,8	2,1
		2-4	309,7	310,3	0,6
		2-5	465,1	464,6	-0,5
Родник – Швейцария	1	1-2	228,3	227,5	-0,8
		1-3	456,2	459,0	2,8
		1-4	685,2	682,7	-2,5
		1-5	913,3	913,5	0,2
	2	2-3	227,9	231,5	-3,7
		2-4	456,9	455,2	1,6
		2-5	684,9	686,0	-1,1

Согласно данным табл. 3, на линии Родник — Речка общая тенденция уменьшения приращения рефракции с высотой несколько нарушается на четвертом измерительном уровне как для $\delta r_{1 \rightarrow 4}$, так и для $\delta r_{2 \rightarrow 4}$. Однако величина нарушения тенденции сопоставима с приборной СКП измерения разности измеренных углов наклона. В связи с этим было принято решение использовать полный набор градиентных измерений.

На линии Родник — Костино по величинам $\delta r_{1 \rightarrow 2}$ и $\delta r_{1 \rightarrow 3}$ обнаружен перелом атмосферной стратификации. При исключении первого уровня изменение знака приращения угла рефракции на остальных уровнях укладывается в тенденцию уменьшения приращения рефракции с высотой. На основании вышесказанного было принято решение исключить из обработки первый уровень.

На линии Родник — Швейцария обнаружено несколько изменений знака $\delta r_{i \rightarrow j}$. Они однозначно свидетельствуют о наличии слоистости, но исключение крайних уровней не приводит к улучшению результатов, т. к. существует несколько точек перегиба.

Таким образом, в данных условиях слоистость атмосферы была обнаружена на двух визирных линиях с наиболее развитым растительным покровом, что подтверждает сформулированные выше выводы о необходимости учета данного фактора. Для подтверждения корректности исключения измерений, содержащих влияние слоистости атмосферы, решение задачи на каждой визирной линии выполнено для всех сочетаний измерительных уровней. С этой целью по всем возможным наборам результатов градиентных геодезических измерений было осуществлено определение коэффициента рефракции по алгоритму, представленному в [17]. Результаты приведены в табл. 4.


Таблица 4  Определение коэффициента рефракции по результатам градиентных геодезических измерений

Table 4
The refraction coefficient determination based on the results of gradient geodetic measurements

Визирная линия	Уровни	$grad_n, 10^{-8}/м$	$m_{grad_n}, 10^{-8}/м$	k	m_k
Родник — Речка	1-5	0,4	0,4	0,27	0,03
	2-5	9,1	1,5	0,58	0,10
	1-4	4,9	0,5	0,31	0,03
Родник — Костино	1-5	6,4	0,8	0,41	0,05
	2-5	11,2	2,3	0,71	0,15
	1-4	6,7	1,0	0,43	0,06
Родник — Швейцария	1-5	14,6	1,9	0,93	0,12
	2-5	15,7	2,3	1,00	0,15
	1-4	15,2	22	0,97	0,14

В табл. 4 представлены значения градиента показателя преломления $grad_n$, коэффициента рефракции k , а также значения СКП градиента показателя преломления m_{grad_n} и коэффициента рефракции m_k соответственно.

Далее с помощью смоделированных значений коэффициентов рефракции (табл. 4) по формуле (5) вводились поправки в результаты тригонометрического нивелирования. Сравнение исправленных за влияние ВР результатов одностороннего тригонометрического нивелирования h_k с допустимой погрешностью нивелирования IV класса приведено в табл. 5, которая дополнена последним столбцом, содержащим погрешности превышений, исправленных за стандартный коэффициент рефракции.


Таблица 5  Сравнение точности превышений, исправленных за определенный по алгоритму [17] коэффициент рефракции, с допустимой погрешностью нивелирования IV класса

Table 5
Comparing of the accuracy of the elevation differences, corrected for the refraction coefficient determined by the algorithm [17], with the maximum allowable error for the IV class levelling

Визирная линия	Уровни	$S, м$	$\Delta h_{пред}, мм$	$\Delta h, мм$	$\Delta h_{k=0,14}, мм$
Родник — Речка	1-5	485,260	9,6	-0,3	2,2
	2-5	485,260		0,3	
	1-4	485,260		-0,9	
Родник — Костино	1-5	665,178	13,4	13,1	22,4
	2-5	665,178		4,5	
	1-4	665,178		12,3	
Родник — Швейцария	1-5	452,039	9,0	2,8	15,5
	2-5	452,039		0,1	
	1-4	452,039		2,1	

Данные табл. 5 свидетельствуют о следующем:

1. Во всех случаях использование значения коэффициента рефракции, смоделированного по разработанному авторами алгоритму [17], обеспечило точность одностороннего тригонометрического нивелирования, удовлетворяющую требованиям геометрического нивелирования IV класса.
2. Оптимальному сочетанию измерительных уровней, подобранному на основании анализа тенденции изменения приращения рефракции с высотой, соответствуют минимальные отклонения исправленных превышений от истинных значений, что подтверждает обоснованность использования изменений $\delta r_{i \rightarrow j}$ с высотой для обнаружения слоистости атмосферы и подбора оптимального сочетания уровней, включаемых в обработку.
3. Во всех случаях погрешность превышений, исправленных за стандартный коэффициент рефракции, в несколько раз превышает погрешность, полученную при использовании предложенного авторами подхода.

4 Выводы

На основе результатов исследования можно сделать следующие выводы:

1. Выполненный анализ закономерностей формирования ВР позволил выявить факторы, подлежащие учету при организации полевых градиентных геодезических измерений, и сформулировать требования к расположению измерительных уровней.
2. Разработанные методические приемы производства градиентных геодезических измерений учитывают факторы формирования ВР и обеспечивают контроль точек перегиба вертикального профиля стратификации атмосферы.
3. Разработанная процедура производства угловых измерений на нескольких уровнях обеспечивает оперативность и точность получения исходных данных, необходимых для определения коэффициента рефракции.
4. Составленная программа полевых работ позволяет реализовать геодезический способ определения параметров «геодезической» модели атмосферы.
5. Полевые геодезические наблюдения и анализ полученных результатов показали возможность использования тенденции изменения приращений рефракции с высотой в качестве объективного критерия обнаружения слоистости атмосферы в рабочем слое воздуха.
6. Выполненная оценка точности превышений, исправленных за влияние рефракции с помощью разработанного авторами алгоритма, показала соответствие полученных результатов требованиям геометрического нивелирования IV класса.

БЛАГОДАРНОСТИ


Авторы выражают признательность старшему преподавателю кафедры прикладной геодезии МИИГАиК А.В. Охотникову за помощь в проведении полевых геодезических работ и кандидату технических наук, доценту кафедры фотограмметрии МИИГАиК Т.Н. Скрыпицыной за предоставление цифровой модели рельефа территории экспериментального полигона.

БИБЛИОГРАФИЯ



1. Гордеев В.А., Раева О.С. Сопоставление точности геометрического и тригонометрического нивелирования при создании маркшейдерских высотных сетей // Известия высших учебных заведений. Горный журнал. 2014. № 6. С. 79–84.
2. Дементьев Д.В. Определение вертикальной рефракции в приземном слое атмосферы // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2020. Т. 56, № 4. С. 482–488. DOI:10.31857/S0002351520020029.

3. Дементьев Д.В. Анализ турбулентных методов определения рефракции // Известия вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». 2020. Т. 64, № 1. С. 5–14. DOI:10.30533/0536-101X-2020-64-1-5-14.
4. Baselga S., García-Asenjo L., Garrigues P. Practical Formulas for the Refraction Coefficient // Journal of Surveying Engineering. 2014. Vol. 140. Iss. 2. P. 1–5. DOI:10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000124.
5. Мозжухин О.А. К анализу путей развития проблемы учета рефракции в нивелировании // Геодезия и картография. 2016. № 11. С. 16–19. DOI:10.22389/0016-7126-2016-917-11-16-19.
6. Мозжухин О.А. Рефракция в двустороннем тригонометрическом нивелировании. Определение поправок // Геодезия и картография. 2018. № 4. С. 8–13. DOI:10.22389/0016-7126-2018-934-4-8-13.
7. Shen Y., Huang T., Guo X., et al. Inversion Method of Atmospheric Refraction Coefficient based on Trigonometric Leveling Network // Journal of Surveying Engineering. 2016. Vol. 143. Iss. 1. P. 1–6. DOI:10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000199.
8. Ceylan A., Baykal O. Precise Height Determination Using Leap-Frog Trigonometric Leveling // Journal of Surveying Engineering. 2006. Vol. 132. Iss. 3. P. 118–123. DOI:10.1061/(ASCE)0733-9453(2006)132:3(118).
9. Han M., Liu M.H. Research on the Total Station Trigonometric Leveling Using Midway Method Replaces Three/Four Grade Leveling // Advanced Materials Research. 2014. Vols. 971–973. P. 1144–1147. DOI:10.4028/www.scientific.net/amr.971-973.1144.
10. Кошелев В.А., Карлин К.С., Чахлова А.П. Особенности развития геодезической разбивочной основы в условиях горной местности // Сборник материалов IX Международного научного конгресса «Интерэкспо ГЕО-Сибирь»: в 3 т. Новосибирск: СГГА, 2013. Т. 1, № 1. С. 87–92.
11. Кошелев В.А., Карлин К.С., Чахлова А.П. Инженерно-геодезическое сопровождение строительства канатных дорог // Сборник материалов X Международного научного конгресса «Интерэкспо ГЕО-Сибирь»: в 2 т. Новосибирск: СГГА, 2014. Т. 1. С. 111–116.
12. Михалев А.В. Оценка возможности использования тригонометрического нивелирования для производства высокоточных измерений // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Геология. Нефтегазовое и горное дело. 2013. Т. 12, № 8. С. 136–144.
13. Кудабаяев М.Д., Ногойбаева К.Б., Райымбек кызы Г. и др. Исследование возможностей высокоточного тригонометрического нивелирования из середины взамен технологии геометрического нивелирования для решения специальных задач в условиях Кыргызстана // Наука и инновационные технологии. 2018. № 3(8). С. 271–277.
14. Никонов А.В. Исследование точности тригонометрического нивелирования способом из середины при визировании над разными подстилающими поверхностями // Вестник СГГА. 2013. № 3(23). С. 28–33.
15. Никонов А.В. Технологические схемы при проложении ходов тригонометрического нивелирования // Сборник материалов X Международного научного конгресса «Интерэкспо ГЕО-Сибирь»: в 2 т. Новосибирск: СГГА, 2014. Новосибирск: СГГА, 2014. Т. 1. С. 77–83.
16. Никонов А.В. Исследование влияния вертикальной рефракции на результаты тригонометрического нивелирования короткими лучами способом из середины // Известия вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». 2014. № 1. С. 28–34.
17. Валов Г.Е., Вшивкова О.В. Алгоритм определения коэффициента рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании // Грозненский естественнонаучный бюллетень. 2024. Т. 9, № 4(38). С. 14–22. DOI:10.25744/genb.2024.28.99.002.
18. Вшивкова О.В. О рабочей «геодезической» модели атмосферы // Известия вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». 2005. № 5. С. 22–29.
19. Решетило С.Ю. Разработка комбинированной методики учета влияния вертикальной рефракции в электронной тахеометрии: дис. ... канд. техн. наук. М., 2021. 101 с.
20. Дементьев В.Е. Рефракция и миражи. М.: Галлея-Принт, 2009. 391 с.

АВТОРЫ **Валов Георгий Евгеньевич**

Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, Москва, Россия;
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет геодезии и картографии»
(МИИГАиК), Москва, Россия
кафедра высшей геодезии, геодезический факультет
 0009-0006-3431-1917

Вшивкова Ольга Владимировна

 ovsshivkova@miigaik.ru
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет геодезии и картографии»
(МИИГАиК), Москва, Россия
кафедра высшей геодезии, геодезический факультет
д-р техн. наук, доцент
 0000-0002-0315-7201

Поступила 18.04.2025. Принята к публикации 19.12.2025. Опубликовано 26.12.2025.



Field Testing of Algorithm for Refraction Coefficient Determining from Gradient Geodetic Measurements for Unilateral Trigonometric Levelling

Georgy E. Valov^{1,2}✉, Olga V. Vshivkova¹

¹ Moscow State University of Geodesy and Cartography, Moscow, Russia

² Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ georgevalov@mail.ru

CITATION Valov GE, Vshivkova OV. Field Testing of Algorithm for Refraction Coefficient Determining from Gradient Geodetic Measurements for Unilateral Trigonometric Levelling. *Izvestia Vuzov. Geodesy and Aerophotosurveying*. 2025;69(6): 8–24. DOI:10.30533/GiA-2025-057.

KEYWORDS trigonometric levelling, refraction coefficient, gradient geodetic measurements, atmospheric stratification

ABSTRACT The article presents a field testing of an algorithm for refraction coefficient determining from gradient geodetic measurements for unilateral trigonometric levelling. The algorithm developed by the authors is based on solving by the Monte Carlo method a system of nonlinear equations describing the vertical refraction angle changing in the working air layer. The authors performed analysis of the factors of vertical refraction formation, which to be taken into account in the production of gradient (at several levels) geodetic measurements. It is noted that the successful implementation of the developed algorithm is possible under the condition of unidirectional changes in the vertical atmosphere profile, i. e. in the absence of layers with different atmospheric stratification character. At the stage of preparing field observations, first of all methodological approaches for the production of gradient geodetic measurements were developed. These approaches are based on the analysis of the factors of vertical refraction formation which to be taken into account. Besides a procedure for angular measurements at several levels was proposed. The proposed procedure ensures the efficiency and accuracy, which are necessary to obtain the initial data for the refraction coefficient determining. The performed field observations and the further analysis of the obtained results proved the possibility of using the trend of changes in the increment of the refraction angle with height as an objective criterion for detecting atmospheric stratification change in the working air layer. The accuracy evaluation of the elevation differences corrected for the refraction influence using the algorithm developed by the authors showed that the results obtained met the requirements of geometric levelling of class IV.

ACKNOWLEDGEMENTS


The authors would like to thank A.V. Okhotnikov, Senior Lecturer of the Applied Geodesy Department of the Moscow State University of Geodesy and Cartography, for his assistance in conducting field geodetic work and T.N. Skrypitsyna, PhD, Associate Professor of the Photogrammetry Department of the Moscow State University of Geodesy and Cartography, for providing a digital elevation model of the test area.

REFERENCES



1. Gordeev VA, Raeva OS. Sopostavlenie tochnosti geometricheskogo i trigonometricheskogo nivelirovaniya pri sozdanii marksheiderskikh vysotnykh setei [Comparison of Accuracy of Geometrical and Trigonometric Leveling when Creating Mine Surveying of High Networks]. *Minerals and Mining Engineering*. 2014;6: 79–84. (In Russian).
2. Dement'ev DV. Opredelenie vertikal'noi refraktsii v prizemnom sloe atmosfery [Determination of Vertical Refraction in the Atmospheric Boundary Layer]. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2020;56(4): 482–488 (In Russian). DOI:10.31857/S0002351520020029.
3. Dement'ev DV. Analiz turbulentnykh metodov opredeleniya refraktsii [Analysis of Turbulent Methods for Determining the Refraction]. *Izvestia Vuzov. Geodesy and Aerophotosurveying*. 2020;64(1): 5–14. (In Russian). DOI:10.30533/0536-101X-2020-64-1-5-14.
4. Baselga S, García-Asenjo L, Garrigues P. Practical Formulas for the Refraction Coefficient. *Journal of Surveying Engineering*. 2014;140(2): 1–5. DOI:10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000124.
5. Mozhukhin OA. K analizu putei razvitiya problemy ucheta refraktsii v nivelirovanii [On Analysis of the Ways of Development Issues on Accounting of Refraction in Leveling]. *Geodesy and Cartography*. 2016;11: 16–19. (In Russian). DOI:10.22389/0016-7126-2016-917-11-16-19.
6. Mozhukhin OA. Refraktsiya v dvustoronnem trigonometricheskom nivelirovanii. Opredelenie popravok [Refraction in Bilateral Trigonometric Leveling. Definition of Corrections]. *Geodesy and Cartography*. 2018;79(4): 8–13 (In Russian). DOI:10.22389/0016-7126-2018-934-4-8-13.
7. Shen Y, Huang T, Guo X, et al. Inversion Method of Atmospheric Refraction Coefficient based on Trigonometric Leveling Network. *Journal of Surveying Engineering*. 2016;143(1): 1–6. DOI:10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000199.
8. Ceylan A, Baykal O. Precise Height Determination Using Leap-Frog Trigonometric Leveling. *Journal of Surveying Engineering*. 2006;132(3): 118–123. DOI:10.1061/(ASCE)0733-9453(2006)132:3(118).
9. Han M, Liu MH. Research on the Total Station Trigonometric Leveling Using Midway Method Replaces Three/Four Grade Leveling. *Advanced Materials Research*. 2014;971–973: 1144–1147. DOI:10.4028/www.scientific.net/amr.971-973.1144.
10. Koshelev VA, Karlin KS, Chakhlova AP. Osobennosti razvitiya geodezicheskoi razbivochnoi osnovy v usloviyakh gornoi mestnosti [Features of Development of the Building Network in the Conditions of Mountain District]. *Interexpo GEO-Siberia. Proceedings of IX International Scientific Congress*. In 3 vols. Novosibirsk: SSGA; 2013;1(1): 87–92. (In Russian).
11. Koshelev VA, Karlin KS, Chakhlova AP. Inzhenerno-geodezicheskoe soprovozhdenie stroitel'stva kanatnykh dorog [Engineering-Geodetic Support of Construction Ropeways]. *Interexpo GEO-Siberia. Proceedings of X International Scientific Congress*. In 2 vols. Novosibirsk: SSGA; 2014;1: 111–116. (In Russian).
12. Mikhalev AV. Otsenka vozmozhnosti ispol'zovaniya trigonometricheskogo nivelirovaniya dlya proizvodstva vysokotochnykh izmerenii [Assessment of the Trigonometric Leveling Use for High-Precision Measurements]. *Perm Journal of Petroleum and Mining Engineering*. 2013;12(8): 136–144. (In Russian).
13. Kudabaev MD, Nogoibaeva KB, Raiymbek Kyzy G, et al. Issledovanie vozmozhnoitei vysokotochnogo trigonometricheskogo nivelirovaniya iz serediny vzamen tekhnologii geometricheskogo nivelirovaniya dlya resheniya spetsial'nykh zadach v usloviyakh Kyrgyzstana [The Study of Possibilities of High-Precision Trigonometric Leveling from the Middle Instead of the Technology of Geometric Leveling for Special Tasks in the Conditions of Kyrgyzstan]. *Science and Innovative Technologies*. 2018;8(3): 271–277. (In Russian).

14. Nikonov AV. Issledovanie tochnosti trigonometricheskogo nivelirovaniya sposobom iz serediny pri vizirovanii nad raznymi podstilayushchimi poverkhnostyami [Study of Accuracy in Trigonometric Leveling by Method “From the Middle” when Sighting over Different Underlying Surfaces]. *Vestnik SSGA*. 2013;3(23): 28–33. (In Russian).
15. Nikonov AV. Tekhnologicheskie skhemy pri prolozhenii khodov trigonometricheskogo nivelirovaniya [Technological Techniques of Trigonometric Height Traversing]. *Interexpo GEO-Siberia. Proceedings of X International Scientific Congress*. In 2 vols. Novosibirsk: SSGA;1: 2014: 77–83. (In Russian).
16. Nikonov AV. Issledovanie vliyaniya vertikal'noi refraktsii na rezul'taty trigonometricheskogo nivelirovaniya korotkimi luchami sposobom iz serediny [Investigation of the Effect of Vertical Refraction on the Results of Trigonometric Leveling by Short Beams by the Middle]. *Izvestiya Vuzov. Geodesy and Aerophotosurveying*. 2014;1: 28–34. (In Russian).
17. Valov GE, Vshivkova OV. Algoritm opredeleniya koehffitsienta refraktsii po gradientnym geodezicheskim izmereniyam pri odnostoronnem trigonometricheskom nivelirovanii [Algorithm for Refraction Coefficient Determining from Gradient Geodetic Measurements for Trigonometric Leveling]. *Grozny Natural Science Bulletin*. 2024;38(4): 14–22. (In Russian). DOI:10.25744/genb.2024.28.99.002.
18. Vshivkova OV. O rabochei “geodezicheskoi” modeli atmosfery [About the Working “Geodetic” Model of the Atmosphere]. *Izvestiya Vuzov. Geodesy and Aerophotosurveying*. 2005;5: 22–29. (In Russian).
19. Reshetilo SYu. *Razrabotka kombinirovannoi metodiki ucheta vliyaniya vertikal'noi refraktsii v ehlektronnoi takheometrii* [Development of a Combined Methodology for Accounting for the Effect of Vertical Refraction in Electronic Total Station] [dissertation]. Moscow; 2021. 101 p. (In Russian).
20. Dement'ev VE. *Refraktsiya i mirazhi* [Refraction and Mirages]. Moscow: Galleya-Print; 2009. 391 p. (In Russian).

AUTHORS **Georgy E. Valov**

Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia;
 Moscow State University of Geodesy and Cartography, Moscow, Russia
 Department of Higher Geodesy, Faculty of Geodesy
 0009-0006-3431-1917

Olga V. Vshivkova

 ovshivkova@miigaik.ru
 Moscow State University of Geodesy and Cartography, Moscow, Russia
 Department of Higher Geodesy, Faculty of Geodesy
 Dr. of Sci. (Engineering), Associate Professor
 0000-0002-0315-7201

Submitted: April 18, 2025. Accepted: December 19, 2025. Published: December 26, 2025.