



Оценка существенности коррелированности измерений при их математической обработке

И.А. Клыпин^{1,2}✉, А.А. Алексеева^{1,3}

АФФИЛИАЦИИ

¹ Московский государственный университет геодезии и картографии, Москва, Россия

² Центр геодезии, картографии и ИПД, Москва, Россия

³ Метрогипротранс, Москва, Россия

✉ uvcgf@mail.ru

ЦИТИРОВАНИЕ

Клыпин И.А., Алексеева А.А. Оценка существенности коррелированности измерений при их математической обработке // Пространственные данные: наука и технологии. 2023. Т. 14. № 1. С. 65–75. DOI:10.30533/scidata-2023-14-10.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

геодезические измерения, корреляция, весовая матрица, оценка точности вычислений

АННОТАЦИЯ

В статье рассматривается возможность замены плотной весовой (либо обратной весовой) матрицы коррелированных между собой измерений на соразмерную ей единичную матрицу (или кратную таковой) и, соответственно, выполнения в таком случае упрощенного приближенного, а не строгого уравнивания ввиду того, что на практике в рамках математической обработки весьма широко распространен переход от непосредственно выполненных измерений к их функциям, обычно разностям или суммам, коррелированным между собой, но свободным от влияния тех или иных возмущающих факторов, которое носит систематический характер. Получены критерии установления такой возможности на основе применения неравенства Канторовича и вычисления относительной эффективности получаемых при приближенном уравнивании оценок. Рассмотрено применение этих критериев для математической обработки угловых измерений

на станции. Показано, что, если угловые измерения выполнены по способу круговых приемов, распределение поправки за незамыкание горизонта позволяет рассматривать эти измерения равноточными и не коррелированными между собой. Сделан вывод о возможности распространения данного подхода также на спутниковые измерения и применения полученных критериев в том числе в их случае.

1 Введение

Нередко в геодезической практике обрабатываемые измерения оказываются коррелированными, особенно когда в качестве таковых рассматриваются не непосредственно выполненные измерения, а их некоторые функции, обычно разности или суммы, переход к которым, как известно, является одним из наиболее эффективных способов по исключению влияния различного рода возмущений, носящего систематический характер. В то же время, как известно из теории уравнительных вычислений, при уравнивании весовую матрицу измерений вполне возможно заменять на любую соразмерную ей невырожденную матрицу [1]. Представляет определенный интерес возможность использования вместо плотной весовой матрицы коррелированных измерений матрицы единичной (либо кратной таковой в зависимости от выбранной единицы веса). Однако уравнивание в таком случае будет лишь приближенным, а получаемые оценки искомых величин (параметров) — менее эффективными.

В разное время данный вопрос изучался как применительно к измерениям конкретного вида [2–5], так и применительно к их последовательному учету при математической обработке [1, 6, 7]. В настоящее время он также актуален [8–10], поскольку замену плотной матрицы на единичную в рамках математической обработки геодезических измерений можно рассматривать как один из возможных путей для оптимизации уравнительных вычислений [11], направленной на уменьшение объема производимых вычислительных операций и их упрощение, и, соответственно, считать в дополнение к обозначенным ранее одной из современных задач уравнительных вычислений [12].

2 Материалы и методы

Оценки искомых величин при строгом и приближенном уравнивании находятся по различным формулам. При строгом уравнивании

1

$$\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{X}^{(0)} + (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_Y^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_Y^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^{(0)}).$$

При приближенном уравнивании (когда весовая матрица заменяется кратной единичной)

2

$$\bar{\mathbf{X}}_E = \mathbf{X}^{(0)} + (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^{(0)}).$$

Их различие может быть охарактеризовано относительной эффективностью, рассчитываемой как частное от деления детерминанта (определителя) обратной весовой матрицы первой оценки на детерминант обратной весовой матрицы второй таковой:

3

$$e = \frac{\det \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{X}}}}{\det \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{X}}_E}}.$$

Наименьшее из возможных значений данной характеристики может быть установлено исходя из неравенства Канторовича [13–15], левая граница которого, в свою очередь, определяется как функция от числа обусловленности обратной весовой матрицы измерений¹:

4

$$4\alpha / (1+\alpha)^2 \leq e \leq 100\%,$$

5

$$\alpha = \lambda_{\max} / \lambda_{\min},$$

где λ_{\max} и λ_{\min} — соответственно наибольшее и наименьшее собственные числа обратной весовой матрицы измерений.

Чем ближе к нулю эта граница, тем менее эффективными могут оказаться полученные при приближенном уравнивании оценки и тем меньше оснований полагать возможной замену строгого уравнивания приближенным. Таким образом, вычисленная относительная эффективность позволяет судить в том числе о возможности замены на единичную весовой матрицы коррелированных измерений.

3 Результаты

В качестве примера, как и в [9], если рассматривать случай угловых измерений на станции, пусть измерено пять направлений (**Рис. 1**). Все измерения этих направлений равноточны, некоррелированы и характеризуются равной единичной весовой матрицей (в качестве единицы веса рассматривается измерение одного направления).

Если каждое из n направлений измерялось единожды, то при переходе к измерениям углов последние будут характеризоваться уже обратной весовой

¹ Подробнее о неравенстве Канторовича и его существующих вариациях можно ознакомиться в работе Alpargu G. The Kantorovich Inequality with Some Extensions and with Some Statistical Applications. Montreal: McGill University, 1996. 113 p.

6

матрицей размера $n \times n$, которая будет иметь следующий вид:

$$Q_Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

Согласно выполненным и представленным в **Таблице 1** расчетам относительная эффективность в данном случае зависит от числа измеренных направлений, резко уменьшается с увеличением их числа и уже при пяти может составлять менее 50%.

Чтобы понять, насколько это существенно, можно применить известный принцип ничтожного влияния к обобщенной дисперсии, характеризующей точность установления взаимного положения пунктов в сети и по совместительству равной определителю обратной весовой матрицы получаемых оценок. Переходя от малой величины ε (чаще всего принимаемой за 0,05) к вспомогательной величине k , легко получить критерии для оценки существенности деформации геодезической сети, связанной с потерей точности при ее математической обработке:

7

$$\frac{1}{k} \det Q_{\bar{x}_\varepsilon} \leq \det Q_{\bar{x}},$$

8

$$k = 1 / (1 - \varepsilon)^2,$$

9

$$e \geq (1 - \varepsilon)^2,$$

10

$$\alpha \leq (\sqrt{k-1} + \sqrt{k})^2.$$

Ввиду того, что все эти критерии так или иначе связаны с относительной

Рис. 1 Угловые измерения на станции.

Fig. 1 Angle measurements at the station.

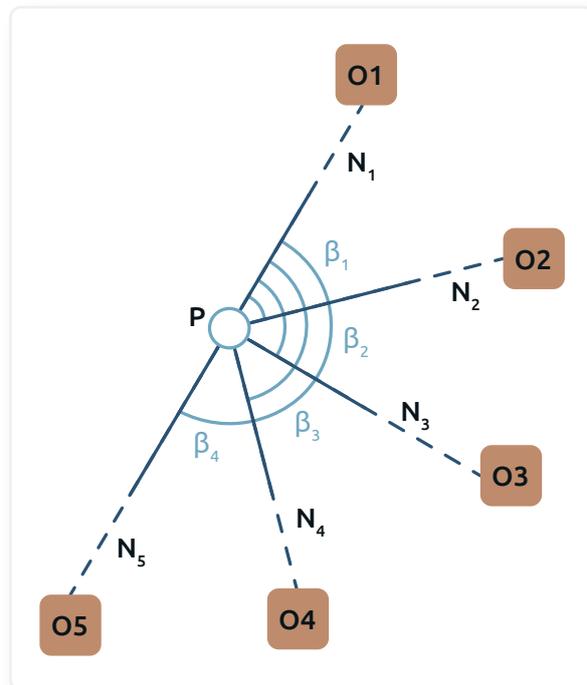


Таблица 1 К расчету относительной эффективности при замене на единичную весовой матрицы угловых измерений.

Table 1 On the calculation of the relative efficiency when replacing the weight matrix of angular measurements with a unit one.

$n-1$	λ_{\max}	λ_{\min}	$e_{\min}, \%$
1	1	1	100
2	3	1	75
3	4	1	64
4	5	1	56
5	6	1	49
6	7	1	44
7	8	1	40
8	9	1	36
9	10	1	33
10	11	1	31

эффективностью, по ним можно оценить целесообразность перехода от строгого уравнивания к приближенному и выполнить оценку существенности коррелированности измерений между собой. Таким образом, все эти критерии можно также полагать критериями некоррелированности.

Полученные согласно этим критериям предельные значения для относительной эффективности и числа обусловленности при разных ε представлены в **Таблице 2**.

Сопоставляя данные из **Таблицы 2** с данными из **Таблицы 1**, можно сделать вывод, что в рассмотренном случае нельзя считать возможной замену строгого уравнивания приближенным, а измерения углов некоррелированными между собой.

Таблица 2 Предельные значения числа обусловленности и относительной эффективности.

Table 2 Limit values of the condition number and relative efficiency.

ε	$\alpha_{\text{пред.}}$	$e_{\text{пред.}}, \%$
0,05	1,38	90
0,10	1,60	81
0,15	3,23	72

4 Обсуждение

Достаточно часто угловые измерения на станции выполняются по способу круговых приемов, и обычно первое направление измеряется дважды, а в измерения осуществляется распределение поправки за незамыкание горизонта. В таком случае при переходе от n направлений к $(n-1)$ углам само незамыкание горизонта следует рассматривать в качестве дополнительного неизвестного и обратную весовую матрицу Q_Y определения этих углов находить согласно следующей последовательности формул параметрического способа уравнивания.

Сначала находится матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок

11

$$A_N = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{E}^{n \times n} & \mathbf{a}_c^{(n+1) \times 1} \\ \mathbf{e}_1^{1 \times n} & \end{array} \right),$$

отдельные блоки которой определяются как

12

$$\mathbf{e}_1 = (1 \ 0 \ \dots \ 0),$$

13

$$\mathbf{a}_c^T = (0 \ 1/n \ 2/n \ \dots \ 1).$$

Затем формируется матрица частных производных

14

$$F_{\beta} = (-e^{n \times 1} \mid E^{n \times n}),$$

первый блок которой получается согласно

15

$$e = (1 \ 1 \ \dots \ 1)^T.$$

И наконец вычисляется искомая обратная весовая матрица определения углов:

16

$$Q_Y = F_{\beta} (A_N^T A_N)^{-1} F_{\beta}^T.$$

Если по способу круговых приемов, как на **Рис. 1**, было определено четыре угла, то обратная весовая матрица определения углов (после распределения поправки за незамыкание горизонта) будет равна

17

$$Q_Y = \begin{pmatrix} 1,000 & 0,250 & 0,500 & 0,750 \\ 0,250 & 1,125 & 0,250 & 0,375 \\ 0,500 & 0,250 & 1,500 & 0,750 \\ 0,750 & 0,375 & 0,750 & 2,125 \end{pmatrix}.$$

Таблица 3 К расчету относительной эффективности при замене на единичную весовой матрицы угловых измерений, выполненных по способу круговых приемов.

Table 3 On the calculation of the relative efficiency when replacing the weight matrix of angular measurements by a unit matrix, performed by the method of circular steps.

$n-1$	λ_{\max}	λ_{\min}	$e_{\min}, \%$
1	1,0	1	100
2	2,0	1,111	92
3	2,5	1	82
4	3,0	1	75
5	3,5	1	69
6	4,0	1	64
7	4,5	1	60
8	5,0	1	56
9	5,5	1	52
10	6,0	1	49

Эффективность оценок в данном случае, как видно из **Таблицы 3**, снижается с ростом числа измеренных направлений не так сильно, как в ранее рассмотренном случае, и, если сопоставлять ее минимально возможные значения e_{\min} из **Таблицы 3** с предельными $e_{\text{пред.}}$ из **Таблицы 2**, определения получаемых таким образом углов можно считать некоррелированными при четырех-пяти направлениях в зависимости от выбранного значения ϵ , притом что большее количество направлений на станциях измеряется редко.

5 Выводы

Таким образом, **подводя итог, можно заключить следующее:**

1. Для определения возможности применения приближенного уравнения вместо строгого можно использовать установленные критерии некоррелированности измерений.

2. С учетом того, что относительная эффективность не зависит от вида выполненных измерений и связана исключительно с их весовой матрицей, принцип распределения поправки за незамыкание горизонта, по мнению авторов, может быть распространен на аналогичные рассмотренному в данной работе варианты перехода от непосредственно выполненных измерений к их разностям, которые можно считать равноточными и не коррелированными между собой (что будет справедливо в том числе для спутниковых измерений).

БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено в рамках федерального проекта «Поддержание, развитие и использование системы ГЛОНАСС» государственной программы Российской Федерации «Космическая деятельность России» на 2021–2030 гг., ЕГИСУ № 1210806000081-5.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Маркузе Ю.И., Голубев В.В. Теория математической обработки геодезических измерений. М.: Академический проект, 2010. 248 с.
2. Маркузе М.Ю. Влияние ошибок координат межевых знаков и их корреляции на точность определения площадей земельных участков с учетом различных построений (засечек) // Изв. вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». 2000. № 2. С. 50–55.
3. Аникин С.Н. Алгоритм фильтрации по методу разностных измерений при неизвестном интервале корреляции ошибок измерения // Материалы докладов VIII конференции молодых ученых «Навигация и управление движением». Санкт-Петербург, 16 марта — 29 сентября 2006 г. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2006. С. 245–251.
4. Падве В.А., Косарев Н.С., Сергеев С.А. Обработка и сравнительный анализ результатов ГНСС-измерений с учетом их коррелированности // Материалы Национальной научно-практической конференции «Регулирование земельно-имущественных отношений в России: правовое и геопространственное обеспечение, оценка недвижимости, экология, технологические решения». Новосибирск: СГУГиТ, 2018. Т. 1. С. 198–204.
5. Есина Е.Н., Лиходеевская В.В. Развитие методов уравнивания нивелирных сетей // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2020. Т. 21, № 1. С. 58–65. DOI: 10.22363/2312-8143-2020-21-1-58-65.
6. Маркузе Ю.И., Михелев Ю.Д. Исследование результатов уравнивания геодезических сетей с учетом ошибок исходных данных, но без учета их корреляции // Изв. вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». 2002. № 4. С. 3–12.
7. Телеганов Н.А. Уравнивание вновь присоединенных геодезических сетей // Гео-Сибирь. 2011. Т. 1, № 1. С. 181–186.
8. Волков В.И., Волков Н.В., Волкова Т.Н. Итерационный метод получения обобщенной средней результатов коррелированных измерений // Успехи современного естествознания. 2021. № 3. С. 35–42. DOI:10.17513/use.37591.

9. Астапович А.В. Способ угловых измерений без систематических ошибок с представлением результатов рядом равноточных независимых направлений // Геодезия и картография. 2022. Т. 83. № 12. С. 2–11. DOI:10.22389/0016-7126-2022-990-12-2-11.
10. Черненко А. Оценка погрешностей разности коррелированных навигационных измерений // Электроника: Наука, технология, бизнес. 2022. № 9(220). С. 102–107. DOI:10.22184/1992-4178.2022.220.9.102.106.
11. Эрлих Л.А. Оптимизация вычислений при уравнивании обширных геодезических сетей // Приложение к журналу Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. Сборник статей по итогам научно-технической конференции. 2020. № 11. С. 32–33.
12. Клыпин И.А. Современные задачи уравнивательных вычислений // Приложение к журналу Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. Сборник статей по итогам научно-технической конференции. 2011. № 4. С. 52–53.
13. Gustafson K. The Trigonometry of Matrix Statistics // International Statistical Review. 2006. № 74(2). P. 187–202.
14. Moslehian M.S. Recent developments of the operator Kantorovich inequality // Expositiones Mathematicae. 2012. Vol. 30. Iss. 4. P. 376–388. DOI:10.1016/j.exmath.2012.08.007.
15. Fika F., Mitrouli M., Turec O. On the estimation of $x^T A^{-1} x$ for symmetric matrices // Electronic Journal of Linear Algebra. 2021. № 37. P. 549–561. DOI:10.13001/ela.2021.5611.

АВТОРЫ

Клыпин Игорь Андреевич

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет геодезии и картографии»
(МИИГАиК), Москва, Россия
кафедра геодезии, геодезический факультет
канд. техн. наук;
ФГБУ «Центр геодезии, картографии и ИПД», Москва, Россия
 0000-0002-6164-566

Алексеева Анастасия Александровна

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет геодезии и картографии»
(МИИГАиК), Москва, Россия
геодезический факультет;
АО «Метрогипротранс», Москва, Россия
 0000-0001-8953-9851

Поступила 29.05.2023. Принята к публикации 23.06.2023. Опубликовано 30.06.2023.

UDC 528.1

DOI:10.30533/scidata-2023-14-10



Estimation of the significance of the correlation of measurements in their mathematical processing

Igor A. Klypin^{1,2}✉, Anastasia A. Alekseeva^{1,3}

AFFILIATIONS

¹ Moscow State University of Geodesy and Cartography, Moscow, Russia

² Center of Geodesy, Cartography and SDI, Moscow, Russia

³ Metrogiprotrans, Moscow, Russia

✉ uvcgf@mail.ru

CITATION

Klypin IA, Alekseeva AA. Estimation of the significance of the correlation of measurements in their mathematical processing. *Spatial Data: science, research and technology*. 2023;14(1): 65–75. DOI:10.30533/scidata-2023-14-10.

KEYWORDS

geodetic measurements, correlation, weight matrix, estimation of calculation accuracy

ABSTRACT

The article considers the possibility of replacing the weight matrix of correlated measurements with an identity matrix commensurate with it and, accordingly, performing an approximate rather than strict adjustment in this case. Criteria for establishing such a possibility are obtained on the basis of the Kantorovich inequality and the relative efficiency of estimates obtained by approximate adjustment. The application of these criteria for processing the performed angular measurements at the station is considered. It is shown that when they are performed according to the method of circular steps, the distribution of the correction for the non-closure of the horizon allows us to consider the angle measurements as equal and uncorrelated with each other.

REFERENCES

1. Markuze Yul, Golubev VV. *Teoriya matematicheskoi obrabotki geodezicheskikh izmerenii* [Theory of mathematical processing of geodetic measurements]. Moscow: Akademicheskii proekt. 2010. 248 p. (In Russian).
2. Markuze MYu. Vliyanie oshibok koordinat mezhevykh znakov i ikh korrelyatsii na tochnost' opredeleniya ploshchadei zemel'nykh uchastkov s uchetom razlichnykh postroenii (zasechek) [The influence of errors in the coordinates of boundary marks and their correlation on the accuracy of determining the area of land plots, taking into account various constructions (serifs)]. *Izvestia vuzov "Geodesy and Aerophotosurveying"*. 2000;2: 50–55. (In Russian).
3. Anikin SN. Algoritm fil'tratsii po metodu raznostnykh izmerenii pri neizvestnom intervale korrelyatsii oshibok izmereniya [The algorithm of filtering by the method of difference measurements with an unknown interval of correlation of measurement errors]. *Proceedings of the reports of the VIII conference of young scientists "Navigation and motion control"*. Saint Petersburg, 16 March — 29 September 2006. Saint Petersburg: TsNII "Elektropribor". 2006: 245–251. (In Russian).
4. Padve VA, Kosarev NS, Sergeev SA. Obrabotka i sravnitel'nyi analiz rezul'tatov GNSS-izmerenii s uchetom ikh korrelirovannosti [Processing and comparative analysis of GNSS-measurements, based on their correlation]. *Proceedings of the National Scientific and Practical Conference "Regulation of land and property relations in Russia: legal and geospatial support, real estate valuation, ecology, technological solutions"*. Novosibirsk: SGUGiT, 2018;1: 198–204. (In Russian).
5. Esina EN, Likhodeevskaya VV. Razvitie metodov uravnivaniya nivelirnykh setei [Development of methods for equalizing level networks]. *RUDN Journal of Engineering Resources*. 2020;21(1): 58–65. (In Russian). DOI: [10.22363/2312-8143-2020-21-1-58-65](https://doi.org/10.22363/2312-8143-2020-21-1-58-65).
6. Markuze Yul, Mikhelev YuD. Issledovanie rezul'tatov uravnivaniya geodezicheskikh setei s uchetom oshibok iskhodnykh dannykh, no bez ucheta ikh korrelyatsii [Study of the results of adjusting geodetic networks taking into account errors in the source data, but without taking into account their correlation]. *Izvestia vuzov "Geodesy and Aerophotosurveying"*. 2002;4: 3–12. (In Russian).
7. Teleganov NA. Uravnivanie vnov' prisoedinennykh geodezicheskikh setei [Adjustment of newly adjoined geodetic networks]. *Geo-Sibir*. 2011;1(1): 181–186. (In Russian).
8. Volkov VI, Volkov NV, Volkova TN. Iteratsionnyi metod polucheniya obobshchennoi srednei rezul'tatov korrelirovannykh izmerenii [An iterative method for obtaining a generalized average of the results of correlated measurements]. *Uspekhi sovremennogo estestvoznaniya*. 2021;3: 35–42. (In Russian). DOI: [10.17513/use.37591](https://doi.org/10.17513/use.37591).
9. Astapovich AV. Sposob uglovykh izmerenii bez sistemicheskikh oshibok s predstavleniem rezul'tatov ryadom ravnotochnykh nezavisimykh napravlenii [A method of infallible angular measurements representing the results of independent equally accurate directions' number]. *Geodesy and Cartography*. 2022;83(12): 2–11 (In Russian). DOI: [10.22389/0016-7126-2022-990-12-2-11](https://doi.org/10.22389/0016-7126-2022-990-12-2-11).

10. Chernenko A. Otsenka pogreshnostei raznosti korrelirovannykh navigatsionnykh izmerenii [Estimation of errors in the difference between correlated navigation measurements]. *Elektronika: Nauka, tekhnologiya, biznes*. 2022;9(220): 102–107. (In Russian).
11. Erlikh LA. Optimizatsiya vychislenii pri uravnivanii obshirnykh geodezicheskikh setei [Optimization of calculations when adjusting extensive geodetic networks]. *Prilozhenie k zhurnalu Izvestiya vuzov. Geodeziya i aerofotos"emka. Sbornik statei po itogam nauchno-tekhnicheskoi konferentsii*. 2020;11: 32–33. (In Russian).
12. Klypin IA. Sovremennye zadachi uravnitel'nykh vychislenii [Modern problems of equalization calculations]. *Prilozhenie k zhurnalu Izvestiya vuzov. Geodeziya i aerofotos"emka. Sbornik statei po itogam nauchno-tekhnicheskoi konferentsii*. 2011;4: 52–53. (In Russian).
13. Gustafson K. The Trigonometry of Matrix Statistics. *International Statistical Review*. 2006;74(2): 187–202.
14. Moslehian MS. Recent developments of the operator Kantorovich inequality. *Expositiones Mathematicae*. 2012;30(4): 376–388. DOI:10.1016/j.exmath.2012.08.007.
15. Fika F, Mitrouli M, Turec O. On the estimation of $x^T A^{-1} x$ for symmetric matrices. *Electronic Journal of Linear Algebra*. 2021;37: 549–561. DOI:10.13001/ela.2021.5611.

AUTHORS

Igor A. Klypin

Moscow State University of Geodesy and Cartography, Moscow, Russia

Department of Geodesy, Faculty of Geodesy

PhD in Engineering;

Center of Geodesy, Cartography and SDI, Moscow, Russia

 0000-0002-6164-566

Anastasia A. Alekseeva

Moscow State University of Geodesy and Cartography, Moscow, Russia

Faculty of Geodesy;

JSC Metrogiprotrans, Moscow, Russia

 0000-0001-8953-9851

Submitted: May 29, 2023. Accepted: June 23, 2023. Published: June 30, 2023.